Classes préparatoires MP
Programme de mathématiques
Deuxième année

Table des matières

INTRODUCTION GENERALE : Objectifs de formation

Le programme de mathématiques de deuxième année, dans le prolongement de celui de première année, est conçu pour amener progressivement tous les étudiants au niveau requis pour poursuivre avec succès un cursus d'ingénieur, de chercheur, d'enseignant, de scientifique, et aussi pour leur permettre de se former tout au long de la vie. Ce programme permet de conjuguer deux aspects de l'activité mathématique : d'une part la construction d'objets souvent introduits de manière intrinsèque et l'importance de la démonstration ; d'autre part la technique qui permet de rendre ces objets opérationnels.
Les programmes des classes préparatoires définissent un corpus de connaissances et de capacités, et explicitent six grandes compétences qu'une activité mathématique bien conçue permet de développer :

– s'engager dans une recherche, mettre en œuvre des stratégies : découvrir une problématique, l'analyser, la transformer ou la simplifier, expérimenter sur des exemples, formuler des hypothèses, identifier des particularités ou des analogies ;
– modéliser : extraire un problème de son contexte pour le traduire en langage mathématique, comparer un modèle à la réalité, le valider, le critiquer ;
– représenter : choisir le cadre (numérique, algébrique, géométrique ...) le mieux adapté pour traiter un problème ou représenter un objet mathématique, passer d'un mode de représentation à un autre, changer de registre ;
– raisonner, argumenter : effectuer des inférences inductives et déductives, conduire une démonstration, confirmer ou infirmer une conjecture ;
– calculer, utiliser le langage symbolique : manipuler des expressions contenant des symboles, organiser les différentes étapes d'un calcul complexe, effectuer un calcul automatisable à la main où à l'aide d'un instrument (calculatrice, logiciel...), contrôler les résultats ;
– communiquer à l'écrit et à l'oral : comprendre les énoncés mathématiques écrits par d'autres, rédiger une solution rigoureuse, présenter et défendre un travail mathématique.

L'étude de chaque domaine du programme (analyse et probabilités, algèbre et calcul différentiel) permet de développer des aptitudes au raisonnement et à la modélisation, et d'établir des liens avec les autres disciplines.

Afin de contribuer au développement des compétences de modélisation et de représentation, le programme préconise le recours à des figures géométriques pour aborder l'algèbre linéaire, les espaces préhilbertiens, les fonctions de variable réelle ou vectorielle.

Les programmes définissent les objectifs de l'enseignement et décrivent les connaissances et les capacités exigibles des étudiants ; ils précisent aussi certains points de terminologie et certaines notations. Ils fixent clairement les limites à respecter tant au niveau de l'enseignement que des épreuves d'évaluation, y compris par les opérateurs de concours.

L'année est découpée en deux semestres. Le volume horaire proposé pour chaque chapitre est approximatif et concerne le temps alloué au cours intégré (cours, applications et exercices corrigés (T.D)).

PROGRAMME D'ALGEBRE : PREMIER SEMESTRE

Structures algébriques usuelles (20 H)

L'étude des structures algébriques permet d'approfondir plusieurs points abordés en première année : arithmétique de $\mathbb{Z}$ *et de* $\mathbb{K}[X]$*, congruences, algèbre linéaire, groupe symétrique, groupes issus de l'algèbre linéaire et de la géométrie des espaces euclidiens. Ce chapitre gagne à être illustré par de nombreux exemples.*
Le paragraphe relatif aux polynômes permet de revenir sur l'étude menée en première année, dans un cadre étendu et dans un esprit plus algébrique, mettant l'accent sur la notion d'idéal.
Sans soulever de difficulté, on signalera que les notions d'algèbre linéaire étudiées en première année s'étendent au cas où le corps de base est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Groupes et sous-groupes	
Groupe. Produit fini de groupes. Sous-groupe. Caractérisation. Intersection de sous-groupes. Sous-groupe engendré par une partie. Sous-groupes du groupe $(\mathbb{Z},+)$.	Exemples issus de l'algèbre et de la géométrie.
b) Morphismes de groupes	
Morphisme de groupes. Image et image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme. Image et noyau d'un morphisme. Condition d'injectivité d'un morphisme. Isomorphisme de groupes. Réciproque d'un isomorphisme.	Exemples : signature, déterminant. Exemple : groupe spécial orthogonal d'un espace euclidien.
Groupes monogènes et cycliques	
Groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$. Générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.	
Groupe monogène, groupe cyclique. Tout groupe monogène infini est isomorphe à $(\mathbb{Z},+)$. Tout groupe monogène fini de cardinal n est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$.	Groupe des racines n-ièmes de l'unité.
Ordre d'un élément dans un groupe	
Élément d'ordre fini d'un groupe, ordre d'un tel élément.	Si x est d'ordre fini, l'ordre de x est le cardinal du sous-groupe de G engendré par x.
Si x est d'ordre fini d et si e désigne le neutre de G, alors, pour n dans $\mathbb{Z}$, on a $x^n = e \Longleftrightarrow d \mid n$.	
L'ordre d'un élément d'un groupe fini divise le cardinal du groupe.	La démonstration n'est exigible que pour G commutatif.
Anneaux	
Anneau. Produit fini d'anneaux. Sous-anneaux. Morphisme d'anneaux. Image et noyau d'un morphisme. Isomorphisme d'anneaux.	Les anneaux sont unitaires.
Anneau intègre. Corps. Sous-corps.	Les corps sont commutatifs.
Idéaux d'un anneau commutatif	
Idéal d'un anneau commutatif. Le noyau d'un morphisme d'anneaux est un idéal.	
Relation de divisibilité dans un anneau commutatif intègre.	Interprétation de la divisibilité en termes d'idéaux.
Idéaux de $\mathbb{Z}$.	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	
Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.	L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps si et seulement si n est premier.
Théorème chinois : si m et n sont deux entiers premiers entre eux, isomorphisme naturel de $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.	Application aux systèmes de congruences.
Indicatrice d'Euler φ. Calcul de $\varphi(n)$ à l'aide de la décomposition de n en facteurs premiers.	
Théorème d'Euler.	Lien avec le petit théorème de Fermat étudié en première année.
Anneaux de polynômes à une indéterminée	
Dans ce paragraphe, K est un sous-corps de $\mathbb{C}$.	
Idéaux de $K[X]$. PGCD de deux polynômes.	Par convention, le PGCD est unitaire. Extension au cas d'une famille finie.
Relation de Bézout. Lemme de Gauss.	
Irréductible de $K[X]$. Existence et unicité de la décomposition en facteurs irréductibles.	Les étudiants doivent connaître les irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$. L'étude des polynômes sur un corps fini est hors programme.
Algèbres	
Algèbre.	Les algèbres sont unitaires. Exemples : $\mathbb{K}[X]$, $\mathscr{L}(E)$, $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathscr{F}(A,\mathbb{K})$.
Sous-algèbre. Morphisme d'algèbres.	

Réduction des endomorphismes et des matrices carrées (48 H)

La réduction des endomorphismes et des matrices prolonge les notions d'algèbre linéaire vues en classe de première année et trouve des applications dans d'autres domaines du programme.

Les méthodes présentées dans ce chapitre sont de deux types, qu'il convient de souligner : les premières, de nature géométrique, reposent sur les notions de sous-espace stable et d'éléments propres ; les secondes, de nature algébrique, font appel aux polynômes annulateurs.

On se limite en pratique au cas où le corps de base $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Généralités	
Matrices semblables, interprétation géométrique.	Les étudiants doivent savoir utiliser l'endomorphisme canoniquement associé à une matrice carrée.
Sous-espace stable par un endomorphisme. Endomorphisme induit.	En dimension finie, traduction de la stabilité d'un sous-espace F par un endomorphisme u à l'aide de la matrice de u dans une base adaptée à F.
Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée	
Droite stable par un endomorphisme. Valeur propre, vecteur propre (non nul), sous-espace propre.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Le spectre d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie est l'ensemble de ses valeurs propres.	La notion de valeur spectrale est hors programme.
La somme d'une famille finie de sous-espaces propres est directe.	Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
Le spectre d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie n est fini, et de cardinal au plus n.	
Si deux endomorphismes u et v commutent, tout sous-espace propre de u est stable par v.	
Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres et spectre d'une matrice carrée.	Équation aux éléments propres $MX = \lambda X$. Deux matrices semblables ont même spectre. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le spectre de M dans $\mathbb{R}$ est contenu dans le spectre de M dans $\mathbb{C}$.

Polynôme caractéristique

Polynôme caractéristique d'une matrice carrée, d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.	Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique. Le polynôme caractéristique est unitaire. Notations χ_u, χ_A. Les étudiants doivent connaître les valeurs des coefficients de degrés 0 et $n-1$.
Les racines du polynôme caractéristique sont les valeurs propres. Multiplicité d'une valeur propre.	La dimension du sous-espace propre associé à λ est majorée par la multiplicité de λ.
Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire.	
Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit.	

Endomorphismes et matrices carrées diagonalisables

Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est diagonale.	Une telle base est constituée de vecteurs propres.
Pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable, il faut et il suffit que la somme de ses sous-espaces propres soit égale à E.	Cas des projecteurs, des symétries.
Une matrice carrée est dite diagonalisable si l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé est diagonalisable.	
Pour qu'une matrice carrée soit diagonalisable, il faut et il suffit qu'elle soit semblable à une matrice diagonale.	Dans la pratique des cas numériques, on se limite à $n = 2$ ou $n = 3$.
Cas d'un endomorphisme d'un espace de dimension n admettant n valeurs propres distinctes.	Traduction matricielle.
Pour qu'un endomorphisme u soit diagonalisable, il faut et il suffit que χ_u soit scindé et que, pour toute valeur propre de u, la dimension de l'espace propre associé soit égale à sa multiplicité.	Traduction matricielle.

Endomorphismes et matrices carrées trigonalisables

Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est dit trigonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure.	Interprétation géométrique.
Une matrice carrée est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure. Pour qu'une matrice carrée soit trigonalisable, il faut et il suffit que l'endomorphisme canoniquement associé le soit.	La pratique de la trigonalisation n'est pas un objectif du programme. On se limite au cas $n = 2$ et à des cas particuliers simples pour $n = 3$.
Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.	Traduction matricielle. Expression de la trace et du déterminant d'un endomorphisme trigonalisable, d'une matrice trigonalisable à l'aide des valeurs propres.

Contenus	Capacités & Commentaires
Endomorphismes nilpotents, matrices nilpotentes	
Endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel E de dimension finie, matrice nilpotente. Un endomorphisme est nilpotent si et seulement s'il est trigonalisable avec pour seule valeur propre 0. L'indice de nilpotence est majoré par la dimension de E.	
Polynômes d'un endomorphisme, d'une matrice carrée	
Pour u dans $\mathscr{L}(E)$, morphisme d'algèbres $P \mapsto P(u)$ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathscr{L}(E)$. Le noyau de ce morphisme est l'idéal annulateur de u. Son image est la sous-algèbre commutative $\mathbb{K}[u]$ de $\mathscr{L}(E)$.	Pour M dans $\mathbb{K}[X]$, morphisme $P \mapsto P(M)$ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, idéal annulateur de M, sous-algèbre $\mathbb{K}[M]$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Polynôme minimal d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie, d'une matrice carrée.	Le polynôme minimal est unitaire.
Si d est le degré du polynôme minimal de u, alors la famille $(u^k)_{0 \leqslant k \leqslant d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$.	
Si P annule u, toute valeur propre de u est racine de P.	Si $u(x) = \lambda\, x$, alors $P(u)(x) = P(\lambda)\, x$.
Théorème de Cayley-Hamilton.	Démonstration non exigible.
Lemme de décomposition des noyaux	
Si $P_1, \dots, P_r$ sont des éléments de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux de produit égal à P, alors : $$\operatorname{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Ker}(P_i(u)).$$	
Polynômes annulateurs et diagonalisabilité	
Un endomorphisme u est diagonalisable si et seulement s'il existe un polynôme scindé à racines simples annulant u, ou encore si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples. Polynôme minimal d'un endomorphisme induit. Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit.	Traduction matricielle.
Endomorphismes à polynôme minimal scindé	
S'il existe un polynôme scindé annulant u, décomposition de E en somme directe de sous-espaces stables par u sur chacun desquels u induit la somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent.	Traduction matricielle. La décomposition de Dunford et la réduction de Jordan sont hors programme.

Fonctions vectorielles, arcs paramétrés (12 H)

Ce chapitre poursuit trois objectifs :
- *étendre le programme d'analyse réelle de première année au cadre des fonctions vectorielles ;*
- *préciser les notions de tangente et de vitesse instantanée ;*
- *fournir des outils pour l'étude des équations différentielles linéaires et du calcul différentiel.*

Dans ce chapitre les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans un espace normé de dimension finie E.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Dérivabilité en un point	
Dérivabilité en un point.	Formes équivalentes : taux d'accroissement, développement limité à l'ordre 1. Interprétation cinématique. Traduction par les coordonnées dans une base de E.
Dérivabilité à droite et à gauche d'une fonction en un point.	
Opérations sur les fonctions dérivables	
Combinaison linéaire de fonctions dérivables. Dérivabilité et dérivée de $L\circ f$, où L est linéaire. Dérivabilité et dérivée de $B(f,g)$, où B est bilinéaire. Cas du produit scalaire. Dérivabilité et dérivée de $f\circ\varphi$ où φ est une fonction réelle de variable réelle et f une fonction vectorielle. Applications de classe $\mathscr{C}^k$ sur un intervalle, $k\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$. Opérations sur les applications de classe $\mathscr{C}^k$.	
Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice	
Exponentielle d'un endomorphisme d'un espace normé de dimension finie, d'une matrice réelle ou complexe.	Notations $\exp(a), \mathrm{e}^a, \exp(A), \mathrm{e}^A$.
Continuité de l'exponentielle.	
Exponentielle de la somme de deux endomorphismes qui commutent.	Démonstration non exigible.
Dérivation, si a est un endomorphisme d'un espace normé de dimension finie, de l'application $t\mapsto\exp(ta)$.	Dérivation de $t\mapsto\exp(tA)$ si A est une matrice carrée réelle ou complexe.
Intégration sur un segment	
Intégrale d'une fonction f continue par morceaux sur un segment de $\mathbb{R}$, à valeurs dans E.	Définie par les intégrales des coordonnées dans une base. Notations $\displaystyle\int_{[a,b]} f$, $\displaystyle\int_a^b f$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
Linéarité de l'intégrale. Relation de Chasles. Inégalité $\displaystyle\left\|\int_a^b f\right\| \leqslant \int_a^b \|f\|$.	
Sommes de Riemann associées à une subdivision régulière.	Extension de l'énoncé relatif aux fonctions numériques étudié en première année.
Intégrale fonction de sa borne supérieure	
Dérivation de $x\mapsto\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour f continue.	Ce paragraphe fournit l'occasion de revoir les résultats correspondants pour les fonctions numériques et les techniques de calcul de primitives.
Inégalité des accroissements finis pour une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.	
Formules de Taylor	
Formule de Taylor avec reste intégral.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n pour une fonction de classe $\mathscr{C}^n$.	
Formule de Taylor-Young à l'ordre n pour une fonction de classe $\mathscr{C}^n$.	Les étudiants doivent connaître la différence de nature entre la formule de Taylor-Young (locale) et les formules de Taylor globales (reste intégral et inégalité de Taylor-Lagrange).

Arcs paramétrés

Arc paramétré de classe $\mathscr{C}^1$ à valeurs dans E. Paramètre régulier. Exemples simples d'arcs paramétrés plans.	Interprétation géométrique de la dérivée : tangente en un point associé à un paramètre régulier. Les étudiants doivent savoir déterminer la tangente et la normale à un arc paramétré plan en un point associé à un paramètre régulier. L'étude des points stationnaires, des courbes asymptotes et des arcs définis par une équation polaire est hors programme. La pratique du tracé des arcs paramétrés n'est pas un objectif du programme.

PROGRAMME D'ALGEBRE : DEUXIEME SEMESTRE

Équations différentielles linéaires (16 H)

La notion générale d'équation différentielle linéaire est introduite à partir des exemples étudiés en première année : équation scalaire d'ordre 1*, équation scalaire homogène d'ordre* 2 *à coefficients constants.*

La résolution explicite des systèmes linéaires à coefficients constants n'est pas un objectif du programme. On limitera en conséquence la technicité des exercices d'application. On pourra en revanche présenter aux étudiants divers exemples d'études qualitatives d'équations différentielles linéaires scalaires ou de systèmes linéaires. Concernant les systèmes à coefficients constants, on pourra souligner le rôle du signe des parties réelles des valeurs propres de la matrice ; on pourra également, en dimension 2*, représenter certaines des courbes intégrales.*

Dans ce chapitre, I *est un intervalle de* $\mathbb{R}$*,* E *un espace normé de dimension finie.*

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Généralités	
Équation différentielle linéaire : $$x' = a(t)(x) + b(t)$$ où a est une application continue de I dans $\mathscr{L}(E)$ et b une application continue de I dans E.	Forme matricielle : systèmes différentiels linéaires $X' = A'(t)X + B(t)$. Équation différentielle homogène associée à une équation différentielle linéaire. Principe de superposition.
Problème de Cauchy. Représentation d'une équation scalaire linéaire d'ordre n par un système différentiel linéaire. Problème de Cauchy pour une équation linéaire scalaire d'ordre n.	Mise sous forme intégrale d'un problème de Cauchy.
Solutions d'une équation différentielle linéaire	
Théorème de Cauchy linéaire : existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy. Cas des équations scalaires d'ordre n. Cas des équations homogènes : l'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(I,E)$. Pour t_0 dans I, l'application $x \mapsto x(t_0)$ est un isomorphisme de cet espace sur E. Dimension de l'espace des solutions. Cas des équations scalaires homogènes d'ordre n. Structure de l'ensemble des solutions d'une équation avec second membre. Exemples d'équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 ou 2 non résolues : $a(x)y' + b(x)y = c(x), \quad a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$.	Démonstration non exigible.
Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants	
Résolution du problème de Cauchy $$x' = a(x), \quad x(t_0) = x_0$$ si a est un endomorphisme de E et x_0 un élément de E.	Traduction matricielle. Pour les calculs explicites, on se borne aux deux cas suivants : A diagonalisable ou $n \leqslant 3$.
Méthode de variation des constantes	
Méthode de variation des constantes pour les systèmes différentiels linéaires à coefficients continus.	Dans les exercices pratiques, on se limite au cas $n = 2$.
Cas particulier des systèmes différentiels à coefficients constants.	Dans les exercices pratiques, on se limite au cas $n = 2$.

Contenus	Capacités & Commentaires
Équations différentielles scalaires du second ordre	
Adaptation de la méthode de variation des constantes aux équations scalaires du second ordre.	
Wronskien de deux solutions d'une équation scalaire homogène d'ordre 2.	Définition et calcul. Cas d'une équation $x'' + q(t)x = 0$.

Espaces préhilbertiens réels. Endomorphismes des espaces euclidiens (36 H)

L'objectif de ce chapitre est triple :

- *consolider les acquis de première année concernant les espaces préhilbertiens réels et euclidiens ;*
- *introduire la notion de suite orthonormale totale de vecteurs d'un espace préhilbertien, notamment afin de donner un exemple important de convergence dans un espace normé ;*
- *à travers l'étude des endomorphismes symétriques et orthogonaux, approfondir simultanément les connaissances de première année relatives aux isométries et celles de deuxième année relatives à la réduction des endomorphismes.*

Les espaces préhilbertiens considérés dans ce chapitre sont réels. Toute notion sur les espaces préhilbertiens complexes est hors programme.
La notion de forme quadratique est hors programme.

Contenus	Capacités & commentaires
Rappels	
Faire des rappels sans démonstrations des notions introduites en première année concernant les espaces préhilbertiens réels et euclidiens .	
Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie	
Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie. Caractérisation métrique du projeté orthogonal. Expression du projeté orthogonal dans une base orthonormale. Inégalité de Bessel.	
Suites orthonormales de vecteurs d'un espace préhilbertien réel	
Suite totale. Si $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite orthonormale totale d'éléments de l'espace préhilbertien E, et si, pour tout n de $\mathbb{N}$, p_n désigne le projecteur orthogonal de E sur Vect $(e_0,\dots,e_n)$, alors, pour tout x de E, $\big(p_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x.	Exemples de suites de polynômes orthogonaux.
Endomorphismes symétriques d'un espace euclidien	
Endomorphisme symétrique d'un espace euclidien.	Lien avec les matrices symétriques réelles. La notion d'adjoint d'un endomprphisme est hors programme.
Caractérisation des projecteurs orthogonaux comme projecteurs symétriques. Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable.	.
Théorème spectral : si u est un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E, alors E est somme directe orthogonale des sous-espaces propres de u ; de manière équivalente, il existe une base orthonormale diagonalisant u.	Interprétation matricielle de ce résultat. La notion d'endomorphisme symétrique positif (ou défini positif) est hors programme.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Isométries vectorielles d'un espace euclidien	
Isométrie vectorielle d'un espace euclidien.	Autre appellation : automorphisme orthogonal. Lien avec les matrices orthogonales.
Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable. Réduction d'une isométrie vectorielle en base orthonormale. Cas particulier : réduction d'une isométrie vectorielle directe d'un espace euclidien de dimension 3.	Interprétation matricielle.

Calcul différentiel (24 H)

L'objectif de ce chapitre est de présenter les premières notions de calcul différentiel dans le cadre des espaces vectoriels normés de dimension finie sur $\mathbb{R}$. Ce chapitre fait intervenir à la fois des aspects intrinsèques et calculatoires, permettant ainsi de développer la compétence « Représenter ».

La différentielle d'une application en un point est introduite à l'aide d'un développement limité. De nombreuses questions se ramènent, via la paramétrisation de chemins, à des énoncés relatifs aux fonctions d'une variable réelle. En particulier, les dérivées partielles fournissent un outil de calcul dans le cas où l'espace de départ est muni d'une base.

Les fonctions considérées dans ce chapitre sont définies sur un ouvert d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie et à valeurs dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie. Le choix d'une base de l'espace d'arrivée permet de se ramener au cas des fonctions à valeurs réelles.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles	
Dérivée de l'application f au point a selon le vecteur v.	Notations $\mathrm{D}_v f(a)$, $\mathrm{D}_v f$.
Dérivées partielles dans une base.	Notations $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, $\partial_i f(a)$. Lorsqu'une base de E est fixée, l'identification entre $f(x)$ et $f(x_1,\ldots,x_n)$ est autorisée.
Différentielle	
Application différentiable au point a. Si f est différentiable en a, alors f est continue en a et dérivable en a selon tout vecteur.	Notation $o(h)$. Développement limité à l'ordre 1.
Différentielle de f en a, encore appelée application linéaire tangente à f en a. Relation $\mathrm{d}f(a)\cdot v = \mathrm{D}_v f(a)$.	Notations $\mathrm{d}f(a)$, $\mathrm{d}f(a)\cdot v$.
Application différentiable sur un ouvert Ω. Différentielle sur Ω. Cas particuliers : application constante, restriction à un ouvert d'une application linéaire. Lien entre différentielle et dérivées partielles. Matrice de $\mathrm{d}f(a)$ dans un couple de bases. Matrice jacobienne d'une application définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$. Cas des fonctions d'une variable : si Ω est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, la différentiabilité de f en a équivaut à la dérivabilité de f en a ; relation $f'(a) = \mathrm{d}f(a)\cdot 1$.	Notation $\mathrm{d}f$.

Contenus	Capacités & Commentaires
Opérations sur les applications différentiables	
Différentielle d'une combinaison linéaire d'applications différentiables, de $B(f,g)$ où B est bilinéaire et f et g sont deux applications différentiables.	On utilise l'existence d'un réel positif C tel que, pour tout (u,v), on ait $\\|B(u,v)\\| \leqslant C\\|u\\|\,\\|v\\|$. Tout développement sur les applications bilinéaires continues est hors programme.
Différentielle d'une composée d'applications différentiables.	
Dérivée le long d'un arc : si γ est une application définie sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$, dérivable en t, si f est différentiable en $\gamma(t)$, alors $(f\circ\gamma)'(t) = \mathrm{d}f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)$.	Interprétation géométrique en termes de tangentes. Cas particulier fondamental : $\gamma(t) = x + th$. Dérivation de $t \mapsto f(x_1(t),\dots,x_n(t))$.
Dérivées partielles d'une composée d'applications différentiables.	Règle de la chaîne : calcul des dérivées partielles de $(u_1,\dots,u_m) \mapsto f(x_1(u_1,\dots,u_m),\dots,x_n(u_1,\dots,u_m))$.
Cas des applications numériques	
Si l'espace E est euclidien, gradient en a d'une application numérique différentiable en a. Expression du gradient en base orthonormée.	Le théorème de représentation des formes linéaires dans un espace euclidien est établi à ce stade. Notation $\nabla f(a)$. Interprétation géométrique du gradient : si $\nabla f(a) \neq 0$, il est colinéaire et de même sens que le vecteur unitaire selon lequel la dérivée de f en a est maximale.
Point critique d'une application différentiable. Condition nécessaire d'existence d'un extremum local. Exemples de recherche d'extremums globaux.	
Vecteurs tangents à une partie d'un espace normé de dimension finie	
Si X est une partie de E et x un point de X, un vecteur v de E est tangent à X en x s'il existe $\varepsilon > 0$ et un arc γ défini sur $]-\varepsilon,\varepsilon[$ dérivable en 0 à valeurs dans X, tels que $\gamma(0) = x, \gamma'(0) = v$.	
Cas où $E = \mathbb{R}^3$ et où X est le graphe d'une fonction f différentiable sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$.	Plan affine tangent à une surface d'équation $z = f(x,y)$: équation cartésienne.
Si f est une fonction à valeurs réelles définie et différentiable sur un ouvert de l'espace euclidien E, si X est une ligne de niveau de f, alors les vecteurs tangents à X au point x de X sont orthogonaux au gradient de f en x.	Le théorème des fonctions implicites est hors programme.
Applications de classe $\mathscr{C}^1$	
Une application f est dite de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert Ω si elle est différentiable sur Ω et si $\mathrm{d}f$ est continue sur Ω.	
L'application f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω si et seulement si les dérivées partielles relativement à une base de E existent en tout point de Ω et sont continues sur Ω.	Démonstration non exigible.
Opérations algébriques sur les applications de classe $\mathscr{C}^1$.	
Si f est une application de classe $\mathscr{C}^1$ de Ω dans F, si γ est une application de classe $\mathscr{C}^1$ de $[0,1]$ dans Ω, si $\gamma(0) = a, \gamma(1) = b$, alors : $$f(b) - f(a) = \int_0^1 \mathrm{d}f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,\mathrm{d}t.$$	
Si Ω est connexe par arcs, caractérisation des fonctions constantes sur Ω.	Démonstration pour Ω convexe.

Contenus	Capacités & Commentaires
Applications de classe $\mathscr{C}^k$	
Dérivées partielles d'ordre k.	Notations $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{j_l} \ldots \partial x_{j_1}}$, $\partial_{j_l} \ldots \partial_{j_1} f$.
Une application est dite de classe $\mathscr{C}^k$ sur un ouvert Ω si ses dérivées partielles d'ordre k existent et sont continues sur Ω.	La notion de différentielle seconde est hors programme.
Théorème de Schwarz.	Démonstration non exigible.
Opérations algébriques sur les applications de classe $\mathscr{C}^k$. Composition d'applications de classe $\mathscr{C}^k$.	Démonstrations non exigibles.
Exemples d'équations aux dérivées partielles du premier et du second ordre.	Les étudiants doivent être capables d'utiliser un changement de variables dans les deux cas suivants : transformation affine, passage en coordonnées polaires. L'utilisation de tout autre changement de variables suppose une indication. La notion de difféomorphisme étant hors programme, l'expression des solutions en fonction des variables initiales n'est pas un attendu.

PROGRAMME D'ANALYSE : PREMIER SEMESTRE

Intégration sur un intervalle quelconque (18 H)

L'objectif de ce chapitre est multiple :
- *étendre la notion d'intégrale étudiée en première année à des fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque par le biais des intégrales généralisées ;*
- *définir, dans le cadre des fonctions continues par morceaux, la notion de fonction intégrable ;*

Les fonctions considérées sont définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles ou complexes.

Contenus	Capacités & commentaires
Intégrale généralisée sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$	
Pour f continue par morceaux de $[a,+\infty[$ dans $\mathbb{K}$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ est dite convergente si la fonction $x \mapsto \int_a^x f$ a une limite finie en $+\infty$. Si tel est le cas, on note $\int_a^{+\infty} f$ cette limite.	Notations $\int_a^{+\infty} f, \int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.
Linéarité de l'intégrale sur $[a,+\infty[$, positivité. Dérivation de $x \mapsto \int_x^{+\infty} f$ si f est continue.	
Intégrabilité sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$	
Une fonction f est dite intégrable sur $[a,+\infty[$ si $\int_a^{+\infty} \lvert f\rvert$ converge.	On utilise indifféremment les expressions « f est intégrable sur $[a,+\infty[$ », et « l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge absolument ».
Si f est intégrable sur $[a,+\infty[$, alors $\int_a^{+\infty} f$ converge.	L'étude des intégrales semi-convergentes n'est pas un objectif du programme.
Intégration des fonctions positives sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$	
Si f est positive sur $[a,+\infty[$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f$ est majorée.	
Pour α dans $\mathbb{R}$, étude de l'intégrabilité de $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ sur $[1,+\infty[$.	
Pour f et g deux fonctions réelles positives continues par morceaux sur $[a,+\infty[$: – si $0 \leqslant f \leqslant g$, l'intégrabilité de g sur $[a,+\infty[$ implique celle de f ; – si $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} O\big(g(x)\big)$, l'intégrabilité de g sur $[a,+\infty[$ implique celle de f ; – si $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$, l'intégrabilité de g sur $[a,+\infty[$ équivaut à celle de f.	
Intégration sur un intervalle quelconque	
Adaptation des paragraphes précédents aux fonctions définies sur un intervalle semi-ouvert de $\mathbb{R}$.	Notations $\int_a^b f, \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. On utilise indifféremment les expressions « f est intégrable sur $[a,b[$ », et « l'intégrale $\int_a^b f$ converge absolument ».
Pour α dans $\mathbb{R}$, étude de l'intégrabilité de $x \mapsto \frac{1}{(x-a)^\alpha}$ sur $]a,b]$, de l'intégrabilité de $x \mapsto \frac{1}{\lvert x-a\rvert^\alpha}$ sur $[b,a[$.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Adaptation des paragraphes précédents aux fonctions définies sur un intervalle ouvert $]a,b[$ de $\mathbb{R}$, $(a,b)\in\overline{\mathbb{R}}^2$.	Notations $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, linéarité et positivité de l'application $f\mapsto\int_I f$ sur l'espace des fonctions de I dans $\mathbb{K}$ dont l'intégrale converge. Relation de Chasles. Espace des fonctions intégrables de I dans E. Inégalité triangulaire. Si f est continue et intégrable sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et si $\int_I f=0$, alors f est identiquement nulle.	Notation $\int_I f$.
Changement de variable : étant données une fonction f continue sur $]a,b[$ et une fonction $\varphi\ :\ ]\alpha,\beta[\to]a,b[$ bijective, strictement croissante et de classe $\mathscr{C}^1$, les intégrales $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature et égales en cas de convergence.	Adaptation au cas où φ est strictement décroissante. Les étudiants peuvent appliquer ce résultat sans justification dans des cas de changements de variable simples (fonctions affines, puissances, exponentielle, logarithme).
Intégration par parties sur un intervalle quelconque : $\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t=[fg]_a^b-\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.	L'existence des limites du produit fg aux bornes de l'intervalle assure que les intégrales de fg' et $f'g$ sont de même nature. Notation $[fg]_a^b$.
Intégration des relations de comparaison	
Intégration des relations de comparaison : domination, négligeabilité, équivalence.	La fonction de référence est positive.

Séries numériques (10 H)

L'objectif de cette partie est de consolider les acquis de première année relatifs aux séries numériques .
Les séries sont avant tout un outil. L'étude des séries semi-convergentes n'est pas un objectif du programme.

Contenus	Capacités & commentaires
Compléments sur les séries numériques	
Règle de d'Alembert.	Introduite principalement en vue de l'étude des séries entières.
Critère des séries alternées. Signe et encadrement des restes.	L'étude des séries semi-convergentes n'est pas un objectif du programme. La transformation d'Abel est hors programme. L'étude de la sommation par tranches dans le cas semi-convergent est hors programme.
Comparaison série-intégrale : Si f est une fonction continue par morceaux et décroissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, alors la série de terme général $\int_{n-1}^n f(t)\,\mathrm{d}t-f(n)$ converge.	Les étudiants doivent savoir utiliser la comparaison série-intégrale pour estimer des sommes partielles de séries divergentes ou des restes de séries convergentes dans le cas où f est monotone. Interprétation géométrique.
Sommation des relations de comparaison : domination, négligeabilité, équivalence.	La suite de référence est positive à partir d'un certain rang. Cas des séries convergentes, des séries divergentes.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Produit de Cauchy de deux séries	
Le produit de Cauchy de deux séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ de nombres complexes est la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} w_n$ avec : $$w_n = \sum_{p+q=n} u_q v_p = \sum_{p=0}^{n} u_p v_{n-p}.$$	
Si les séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ sont absolument convergentes alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} w_n$ l'est aussi et on a : $$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \Big(\sum_{p=0}^{+\infty} u_p\Big)\Big(\sum_{q=0}^{+\infty} v_q\Big).$$	Démonstration non exigible.

Topologie des espaces vectoriels normés (26 H)

Ce chapitre prolonge les notions de limites de suites et de fonctions étudiées en première année, et introduit la topologie des espaces vectoriels normés. Son objectif est multiple :

- *introduire, dans le cadre des espaces vectoriels normés, le vocabulaire de la topologie ;*
- *introduire la notion de compacité dans un espace vectoriel normé ;*
- *étendre la notion de série convergente au cadre des espaces vectoriels normés de dimension finie, en particulier aux espaces de matrices*
- *donner, à travers l'étude des espaces vectoriels normés de dimension finie, un cadre commode pour traiter diverses applications à l'analyse (fonctions vectorielles, équations différentielles linéaires, suites et séries de fonctions).*

Il convient de souligner le contenu géométrique des notions abordées, notamment à l'aide de nombreuses figures.
Les notions d'espace métrique et, a fortiori, d'espace topologique, sont hors programme.
Les notions de suite de Cauchy et d'espace de Banach sont hors programme.
Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Normes et espaces vectoriels normés	
Norme sur un espace vectoriel réel ou complexe. Structure d'espace vectoriel normé.	Vecteurs unitaires.
Distance associée à une norme.	Inégalité triangulaire.
Parties convexes d'un espace vectoriel réel. Boules fermées, boules ouvertes, sphères. Convexité des boules. Parties, suites, fonctions bornées. Norme associée à un produit scalaire sur un espace préhilbertien réel. Normes $\Vert\ \Vert_1$, $\Vert\ \Vert_2$, $\Vert\ \Vert_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$. Norme de la convergence uniforme sur l'espace des fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{K}$. Normes de la convergence en moyenne et de la convergence en moyenne quadratique sur l'espace des fonctions continues sur un segment à valeurs réelles ou complexes. Produit fini d'espaces vectoriels normés.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé	
Suite convergente, divergente. Unicité de la limite. Caractère borné d'une suite convergente. Opérations algébriques sur les suites convergentes. Convergence d'une suite à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés.	
Suites extraites, valeurs d'adhérence.	Une suite ayant au moins deux valeurs d'adhérence diverge.
Comparaison des normes	
Normes équivalentes.	Invariance du caractère borné, de la convergence d'une suite. Utilisation des suites pour établir que deux normes ne sont pas équivalentes. La comparaison de normes définies sur des espaces fonctionnels fait partie des capacités attendues des étudiants.
Topologie d'un espace normé	
Ouvert d'un espace normé. Stabilité par réunion quelconque, par intersection d'une famille finie. Voisinage d'un point.	Une boule ouverte est un ouvert.
Fermé d'un espace normé. Stabilité par intersection quelconque, par réunion finie. Point intérieur, point adhérent. Intérieur, adhérence, frontière d'une partie. Caractérisation séquentielle des points adhérents, des fermés. Partie dense. Invariance des notions topologiques par passage à une norme équivalente.	Une boule fermée, une sphère, sont fermées.
Si A est une partie d'un espace normé, ouvert et fermé relatifs de A. Voisinage relatif.	Caractérisation séquentielle des fermés de A.
Étude locale d'une application, continuité	
Limite en un point adhérent à une partie A. Caractérisation séquentielle.	Extensions : limite de $f(x)$ lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$, limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ lorsque A est une partie de $\mathbb{R}$, limite infinie en a adhérent à A pour une fonction réelle.
Cas d'une application à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés. Opérations algébriques sur les limites. Limite d'une composée. Continuité en un point. Caractérisation séquentielle.	
Opérations algébriques sur les applications continues. Composition de deux applications continues. Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé par une application continue.	Les étudiants doivent savoir que deux applications continues qui coïncident sur une partie dense sont égales.
Applications uniformément continues, applications lipschitziennes.	Exemple : l'application $x \mapsto d(x, A)$ où A est une partie de E.
Pour qu'une application linéaire u de E dans F soit continue, il faut et il suffit qu'il existe $C > 0$ tel que : $$\forall x \in E, \quad \|u(x)\| \leqslant C\|x\|.$$	Notation $\mathscr{L}_c(E, F)$. La notion de norme subordonnée est hors programme.

Contenus	Capacités & Commentaires
Parties compactes d'un espace normé	
Définition d'une partie compacte par la propriété de Bolzano-Weierstrass. Une partie compacte est fermée et bornée. Une partie fermée d'une partie compacte est compacte. Une suite d'éléments d'une partie compacte converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence. Produit d'une famille finie de compacts.	La propriété de Borel-Lebesgue est hors programme.
Applications continues sur une partie compacte	
Image d'une partie compacte par une application continue. Théorème de Heine.	Cas particulier des applications à valeurs réelles : théorème des bornes atteintes.
Parties connexes par arcs d'un espace vectoriel normé	
Chemin continu joignant deux points.	Relation d'équivalence associée sur une partie A de E. Les classes d'équivalence sont les composantes connexes par arcs.
Parties connexes par arcs.	Dans des cas simples, une figure convaincante vaut preuve de connexité par arcs. Cas des parties convexes, des parties étoilées.
Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.	
Image continue d'une partie connexe par arcs.	Cas particulier des applications à valeurs réelles : théorème des valeurs intermédiaires.
Espaces vectoriels normés de dimension finie	
Équivalence des normes sur un espace de dimension finie.	Démonstration non exigible.
Invariance des différentes notions topologiques par rapport au choix d'une norme en dimension finie.	Les étudiants doivent savoir que la convergence d'une suite (ou l'existence de la limite d'une fonction) à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie équivaut à celle de chacune de ses coordonnées dans une base.
Une partie d'un espace normé de dimension finie est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée. Une suite bornée d'un espace normé de dimension finie converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence. Un sous-espace de dimension finie d'un espace normé est fermé. Si E est de dimension finie, toute application linéaire de E dans F est continue.	
Continuité des applications polynomiales, des applications multilinéaires définies sur un produit d'espaces vectoriels normés de dimensions finies.	Exemple : déterminant.
Séries à valeurs dans un espace normé de dimension finie	
Sommes partielles. Convergence, divergence.	La série de terme général u_n est notée $\sum u_n$ ou $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$.
Somme et restes d'une série convergente.	En cas de convergence, notation $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.
Linéarité de la somme.	
Le terme général d'une série convergente tend vers 0.	Divergence grossière.
Lien suite-série.	La suite (u_n) et la série $\sum(u_{n+1}-u_n)$ ont même nature.
Série absolument convergente.	Cas des séries matricielles.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Une série absolument convergente d'éléments d'un espace vectoriel normé de dimension finie est convergente.	Le critère de Cauchy est hors programme.

Suites et séries de fonctions (30 H)

L'objectif de ce chapitre est triple :

- *définir les différents modes de convergence des suites et séries de fonctions ;*
- *étudier la stabilité des propriétés des fonctions par passage à la limite ;*
- *énoncer deux théorèmes d'approximation uniforme choisis pour leur intérêt intrinsèque, les applications qu'ils offrent et l'interprétation qu'ils permettent en termes de densité.*

En vue des applications aux équations différentielles linéaires, les fonctions considérées sont à valeurs dans un espace normé de dimension finie. Dans la pratique, on se limite pour l'essentiel au cas de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On peut commencer par traiter le programme dans ce cadre et expliquer brièvement l'extension au cas général.

Dans ce chapitre, les fonctions sont définies sur une partie A d'un espace vectoriel E de dimension finie et à valeurs dans un espace vectoriel normé F de dimension finie.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Convergence simple, convergence uniforme d'une suite de fonctions	
Convergence simple sur A.	
Convergence uniforme sur A. La convergence uniforme entraîne la convergence simple.	Pour des fonctions bornées, interprétation de la convergence uniforme sur A en termes de norme.
Continuité, double limite	
Si les u_n sont continues en a et si (u_n) converge uniformément vers u sur un voisinage de a, alors u est continue en a.	
Toute limite uniforme de fonctions continues sur A est continue sur A.	Adaptation au cas où la convergence est uniforme au voisinage de tout point de A.
Théorème de la double limite : soit (u_n) une suite de fonctions de A dans F convergeant uniformément vers u sur A, et soit a un point adhérent à A ; si, pour tout n, u_n admet une limite ℓ_n en a, alors (ℓ_n) admet une limite ℓ et $$u(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell.$$	Démonstration non exigible. Adaptation, si $A \subset \mathbb{R}$, aux cas où $a = +\infty$ et $a = -\infty$.
Intégration d'une limite uniforme sur un segment	
Soit (u_n) une suite de fonctions continues définies sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans F, a un point de I. On suppose que (u_n) converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction u. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$ soit $$U_n(x) = \int_a^x u_n, \quad U(x) = \int_a^x u.$$ Alors (U_n) converge uniformément vers U sur tout segment de I.	En particulier, si (u_n) converge uniformément vers u sur le segment S, alors : $$\int_S u_n \to \int_S u.$$

Contenus	Capacités & Commentaires
Dérivation d'une suite de fonctions	
Soit (u_n) une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans F. Si (u_n) converge simplement sur I vers une fonction u, et si (u'_n) converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction v, alors (u_n) converge uniformément vers u sur tout segment de I, u est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $u' = v$.	Extension aux suites de fonctions de classe $\mathscr{C}^k$, sous l'hypothèse de convergence simple de $(u_n^{(j)})$ pour $0 \leqslant j \leqslant k-1$ et de convergence uniforme de $(u_n^{(k)})$ sur tout segment de I.
Séries de fonctions	
Convergence simple, convergence uniforme.	Ces notions sont définies via la suite des sommes partielles.
Une série de fonctions converge uniformément si et seulement si elle converge simplement et la suite de ses restes converge uniformément vers 0.	
Convergence normale d'une série de fonctions. La convergence normale implique la convergence uniforme et la convergence absolue en tout point.	Les étudiants doivent savoir étudier la somme d'une série de fonctions (régularité, étude asymptotique, utilisation de la comparaison série-intégrale).
Adaptation au cas des séries de fonctions des résultats des paragraphes ci-dessus : double limite , continuité , intégration et dérivation.	
Approximation uniforme	
Approximation uniforme d'une fonction continue par morceaux sur un segment par des fonctions en escalier.	
Théorème de Weierstrass : toute fonction continue sur un segment y est limite uniforme de fonctions polynomiales.	Démonstration non exigible.
Passage à la limite sous l'intégrale	
Théorème de convergence dominée : soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux de I dans $\mathbb{K}$ convergeant simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux et telle qu'il existe une fonction φ positive intégrable sur I vérifiant $\lvert f_n \rvert \leqslant \varphi$ pour tout n. Alors : $$\int_I f_n \longrightarrow \int_I f.$$	Démonstration hors programme. L'hypothèse de continuité par morceaux de f, imposée par les limitations du programme, n'a pas l'importance de l'hypothèse de domination.
Extension au cas d'une famille à paramètre réel $(f_\lambda)_{\lambda \in J}$ où J est un intervalle de $\mathbb{R}$.	
Théorème d'intégration terme à terme : Si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I, telle que la série $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I et telle que la série $\sum \int_I \lvert f_n(t) \rvert \, \mathrm{d}t$ converge, alors f est intégrable sur I et $$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$	Démonstration hors programme. L'hypothèse de continuité par morceaux de la somme, imposée par les limitations du programme, n'a pas l'importance de l'hypothèse de convergence de $\sum \int_I \lvert f_n \rvert$.

PROGRAMME D'ANALYSE : DEUXIEME SEMESTRE

Intégrales à paramètre (18 H)

L'objectif de ce chapitre est d'étudier les fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre.
La technicité n'est pas un but en soi. On privilégie donc les exemples significatifs (par exemple intégrales eulériennes ou transformées intégrales).

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Continuité d'une intégrale à paramètre	
Soit A une partie d'un espace normé de dimension finie, I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur $A \times I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que f est continue par rapport à la première variable, continue par morceaux par rapport à la seconde variable. On suppose de plus qu'il existe une fonction φ positive intégrable sur I telle que, pour tout x de A, $\lvert f(x,.)\rvert \leqslant \varphi$. Alors $$g : x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$$ est définie et continue sur A.	L'hypothèse de continuité par morceaux, imposée par les limitations du programme, n'a pas l'importance de l'hypothèse de domination. Extension au cas où l'hypothèse de domination est satisfaite au voisinage d'un point a de A. Si A est un intervalle de $\mathbb{R}$, extension au cas où l'hypothèse de domination est satisfaite sur tout segment de A.
Dérivation d'une intégrale à paramètre	
Si I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $I \times J$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, telle que : – Pour tout $x \in I$, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur J ; – Pour tout $t \in J$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I ; – Pour tout $x \in I$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur J ; – hypothèse de domination : Il existe une fonction φ positive et intégrable sur J, telle que pour tout $(x,t) \in I \times J$, on ait $\left\lvert \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right\rvert \leqslant \varphi(t)$; alors la fonction $g : x \mapsto \int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et on a sur I : $$g'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$	Démonstration non exigible. Adaptation au cas où l'hypothèse de domination est vérifiée sur tout segment de I.
Classe $\mathscr{C}^k$ d'une intégrale à paramètre, sous hypothèse de classe $\mathscr{C}^k$ de $f(.,t)$ pour tout t de I, d'intégrabilité de $\frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,.)$ pour tout x de J si $0 \leqslant j \leqslant k-1$ et de domination sur tout segment de $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$.	Exemples d'étude de fonctions définies comme intégrales : régularité, étude asymptotique.
Continuité et dérivabilité de g lorsque l'intervalle d'intégration J est un segment . Extension aux dérivées d'ordres supérieurs. Théorème de Fubini : lorsque A est un intervalle de $\mathbb{R}$ et que f est continue sur $A \times [a,b]$, pour tout segment $[c,d]$ inclus dans A $$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,t)dx \right) dt = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,t)dt \right) dx.$$	g est continue sur I lorsque f est continue sur $I \times J$. g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I lorsque f est continue à dérivée partielle première par rapport à x continue sur $I \times J$.

Séries entières (12 H)

Les objectifs de ce chapitre sont les suivants :
- *étudier la convergence d'une série entière et les propriétés de sa somme ;*
- *introduire la notion de développement d'une fonction en série entière ;*
- *établir les développements en série entière des fonctions usuelles.*

Les coefficients des séries entières considérées sont réels ou complexes.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Généralités	
Série entière.	
Lemme d'Abel : si la suite $\left(a_n z_0^n\right)$ est bornée alors, pour tout nombre complexe z tel que $\lvert z\rvert < \lvert z_0\rvert$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.	
Rayon de convergence d'une série entière.	Disque ouvert de convergence ; intervalle ouvert de convergence.
La convergence est normale sur tout disque fermé de centre 0 et de rayon strictement inférieur à R ; la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement pour tout z tel que $\lvert z\rvert > R$.	
Si $a_n = O(b_n)$, $R_a \geqslant R_b$. Si $a_n \sim b_n$, $R_a = R_b$.	
Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.	
Utilisation de la règle de d'Alembert.	
Continuité de la somme d'une série entière sur le disque ouvert de convergence.	L'étude des propriétés de la somme au bord du disque ouvert de convergence n'est pas un objectif du programme.
Somme et produit de Cauchy de deux séries entières.	
Série entière d'une variable réelle	
Primitivation d'une série entière sur l'intervalle ouvert de convergence.	
La somme d'une série entière est de classe C^∞ sur l'intervalle ouvert de convergence et ses dérivées s'obtiennent par dérivation terme à terme.	
Expression des coefficients d'une série entière de rayon de convergence strictement positif à l'aide des dérivées en 0 de sa somme.	Si les fonctions $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ coïncident sur un voisinage de 0, alors pour tout n, $a_n = b_n$.
Fonctions développables en série entière, développements usuels	
Développement de $\exp(z)$ sur $\mathbb{C}$.	
Développement de $\dfrac{1}{1-z}$ sur $\{z \in \mathbb{C},\ \lvert z\rvert < 1\}$.	
Fonction développable en série entière sur un intervalle $]-r, r[$ de $\mathbb{R}$. Série de Taylor d'une fonction de classe C^∞ sur un intervalle $]-r, r[$.	
Développements de fonctions de variable réelle.	Les étudiants doivent connaître les développements en série entière des fonctions exponentielle, hyperboliques, circulaires, Arctan, $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto (1+x)^\alpha$. Les étudiants doivent savoir développer une fonction en série entière à l'aide d'une équation différentielle linéaire. Les étudiants doivent savoir exploiter la recherche de solutions développables en série entière d'une équation différentielle.

Familles sommables de nombres complexes (6 H)

L'objectif de ce chapitre est d'introduire brièvement, exclusivement en vue de l'étude des probabilités, la notion de famille sommable de nombres complexes.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Ensembles dénombrables	
Un ensemble est dit dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$. Un ensemble est fini ou dénombrable si et seulement s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.	Les parties infinies de $\mathbb{N}$ sont dénombrables.
Un produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est dénombrable. Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est finie ou dénombrable. Les ensembles $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.	Démonstrations non exigibles.
L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.	Démonstration non exigible.
Familles sommables	
Famille sommable de réels positifs indexée par un ensemble dénombrable. Somme.	La famille $(u_i)_{i\in I}$ est dite sommable si l'ensemble des sommes $\sum\limits_{i\in F} u_i$ où F décrit l'ensemble des parties finies de I est majoré ; dans ce cas, la somme de la famille $(u_i)_{i\in I}$ est la borne supérieure de l'ensemble précédent. Si la famille $(u_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable, sa somme est $+\infty$. Dans tous les cas, la somme est notée $\sum\limits_{i\in I} u_i$.
Théorème de sommation par paquets : si $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition de I et $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs, alors la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si : – Pour tout entier n la famille $(u_i)_{i\in I_n}$ est sommable. – La série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\Big(\sum\limits_{i\in I_n} u_i\Big)$ converge. Dans ce cas : $$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{i\in I_n} u_i\Big).$$	Démonstration hors programme.
Famille sommable de nombres complexes indexée par un ensemble dénombrable	La famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si la famille $(\lvert u_i\rvert)_{i\in I}$ l'est.
Somme d'une telle famille.	Pour une famille de réels, on se ramène à ses parties positive et négative.
Lorsque $I=\mathbb{N}$, lien avec la convergence absolue de la série $\sum u_n$.	
Invariance de la sommabilité et de la valeur de la somme par permutation de l'ensemble des indices. Linéarité de la somme.	Démonstration non exigible.
Théorème de sommation par paquets.	Démonstration hors programme. On vérifie l'hypothèse de sommabilité en appliquant le théorème de sommation par paquets à la famille $(\lvert u_i\rvert)_{i\in I}$.
Applications des familles sommables	
La famille $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ de réels positifs est sommable si et seulement si pour tout n, la série $\sum a_{m,n}$ converge et la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\Big(\sum\limits_{m=0}^{+\infty} a_{m,n}\Big)$ converge. Si tel est le cas $$\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n}\Big) = \sum_{m=0}^{+\infty}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n}\Big).$$	

Contenus	Capacités & Commentaires
Si la famille $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ de nombres complexes est sommable, alors : $$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n} = \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n}.$$	On vérifie l'hypothèse de sommabilité en appliquant l'énoncé précédent à la famille $(\lvert a_{m,n}\rvert)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$.

Variables aléatoires discrètes (34 H)

Ce chapitre, dont l'objectif est d'aborder l'étude des variables aléatoires discrètes, généralise celle qui a été effectuée en première année et fournit des outils permettant d'aborder, sur des exemples simples, l'étude de procédés stochastiques à temps discret. La mise en place de ces outils nécessite d'introduire des notions générales de théorie des probabilités. Ces dernières font l'objet d'un exposé a minima. En particulier :

- *la notion de tribu n'appelle aucun développement théorique ;*
- *la construction d'espaces probabilisés n'est pas un objectif du programme ;*
- *les diverses notions de convergence des suites de variables aléatoires (presque sûre, en probabilité, en loi) sont hors programme.*

Les résultats vus en première année s'étendent de manière très naturelle au cas des variables aléatoires discrètes. Cette extension doit être effectuée rapidement, de manière à libérer du temps pour des activités pratiques.
La notion de variable à densité est hors programme.

Contenus	Capacités & commentaires
Espaces probabilisés	
Tribu sur un ensemble Ω.	On se borne à la définition et à la stabilité par les opérations ensemblistes finies ou dénombrables.
Événements.	Généralisation du vocabulaire relatif aux événements introduit en première année. Espace probabilisable $(\Omega,\mathscr{A})$.
Si $\mathscr{A}$ est une tribu sur Ω, une probabilité sur $(\Omega,\mathscr{A})$ est une application P définie sur $\mathscr{A}$, à valeurs dans $[0,1]$, telle que $P(\Omega)=1$ et, pour toute suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ d'événements deux à deux disjoints, on ait : $$P\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$	Espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},P)$.
Si Ω est fini ou dénombrable et si $\mathscr{A}=\mathscr{P}(\Omega)$, une probabilité P sur $(\Omega,\mathscr{A})$ s'identifie, via la formule $$P(\{\omega\}) = p_\omega,$$ à une famille $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ de réels positifs sommable de somme 1.	
Propriétés élémentaires des probabilités	
Continuité croissante : si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'événements croissante pour l'inclusion, alors : $$P(A_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big).$$	

Contenus	Capacités & Commentaires
Continuité décroissante : si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'événements décroissante pour l'inclusion, alors : $$P(A_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P\Big(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\Big).$$ Si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'événements, alors : $$P\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$	
Événements négligeables, événements presque sûrs. Une réunion finie ou dénombrable d'événements négligeables est négligeable.	Propriétés presque sûres. Tout développement sur ces notions est hors programme.

Probabilités conditionnelles et indépendance

Extension des résultats vus en première année dans le cadre des univers finis : probabilité conditionnelle, formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formules de Bayes. Couple d'événements indépendants. Famille quelconque d'événements mutuellement indépendants.	Notations $P_B(A), P(A\|B)$.

Variables aléatoires discrètes

Étant donnés un ensemble E et un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, une variable aléatoire discrète définie sur Ω est une application X de Ω dans E telle que $X(\Omega)$ soit fini ou dénombrable et que, pour tout x de $X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x\}) \in \mathscr{A}$.	Lorsque $E \subset \mathbb{R}$, la variable aléatoire est dite réelle.
Loi P_X de la variable aléatoire X.	Notations $X \sim Y, X \sim \mathscr{L}$. Notations $(X \geqslant x), (X \leqslant x), (X < x), (X > x)$ pour une variable aléatoire réelle X.

Couples de variables aléatoires, variables aléatoires indépendantes

Couple de variables aléatoires. Loi conjointe, lois marginales.	
Loi conditionnelle de Y sachant $X = x$.	Extension au conditionnement par $X > x$ ou autres inégalités.
Extension aux n-uplets de variables aléatoires. Vecteurs aléatoires discrets.	
Couple de variables aléatoires indépendantes. Famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes.	Extension des résultats vus en première année.
Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, alors pour tout m compris entre 1 et $n-1$, et toutes fonctions f et g, les variables $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.	Démonstration non exigible.
Existence d'espaces probabilisés portant une suite de variables indépendantes de lois discrètes données.	La démonstration est hors programme. Modélisation du jeu de pile ou face infini : suite d'épreuves de Bernoulli mutuellement indépendantes.

Lois usuelles

Pour p dans $]0,1[$, loi géométrique de paramètre p.	Notation $\mathscr{G}(p)$.

Contenus	Capacités & Commentaires
La variable aléatoire X suit la loi $\mathscr{G}(p)$ si $$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X=k) = (1-p)^{k-1} p.$$	Interprétation comme rang du premier succès dans une suite d'épreuves de Bernoulli mutuellement indépendantes de paramètre p.
Caractérisation comme loi sans mémoire : $$P(X > n+k \mid X > n) = P(X > k).$$	
Pour λ dans $\mathbb{R}_+^*$, loi de Poisson de paramètre λ.	Notation $\mathscr{P}(\lambda)$.
Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson : si, pour tout n, $X_n \sim \mathscr{B}(n, p_n)$ et si (np_n) converge vers λ, alors : $$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X_n = k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$	Interprétation de la loi de Poisson comme loi des événements rares.

Espérance

Contenus	Capacités & Commentaires
Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, l'espérance de X est la somme, dans $[0,+\infty]$, de la famille $(P(X=x)\ x)_{x\in X(\Omega)}$.	Notation $\mathrm{E}(X)$.
Si X est une variable aléatoire réelle, la variable aléatoire X est dite d'espérance finie si la famille $(x\,P(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable ; dans ce cas, la somme de cette famille est l'espérance de X.	Notation $\mathrm{E}(X)$. Variables centrées.
Espérance d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique, d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson.	
Linéarité, positivité et croissance de l'espérance sur l'espace des variables aléatoires d'espérance finie définies sur Ω.	Si $\lvert X\rvert \leqslant Y$ et si Y est d'espérance finie, alors X est d'espérance finie.
Formule de transfert : soit X une variable aléatoire discrète, f une fonction définie sur $X(\Omega)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$; alors $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $\big(P(X=x)\ f(x)\big)$ est sommable ; si tel est le cas : $$\mathrm{E}\big(f(X)\big) = \sum_{x\in X(\Omega)} f(x)\,P(X=x).$$	Démonstration non exigible.
Inégalité de Markov.	
Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes d'espérances finies, alors : $$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y).$$	

Variance, écart type et covariance

Contenus	Capacités & Commentaires
Moments.	
Si une variable aléatoire admet un moment d'ordre 2, elle est d'espérance finie.	
Inégalité de Cauchy-Schwarz : si X et Y admettent chacune un moment d'ordre 2, alors XY est d'espérance finie et $\mathrm{E}(XY)^2 \leqslant \mathrm{E}(X^2)\,\mathrm{E}(Y^2)$.	
Espace des variables aléatoires définies sur Ω admettant un moment d'ordre 2.	
Variance, écart type.	Notations $\mathrm{V}(X), \sigma(X)$. Variables réduites.
Relation $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Relation $V(aX+b)=a^2V(X)$.	Si $\sigma(X)>0$, la variable aléatoire $\dfrac{X-E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.
Variance d'une variable aléatoire géométrique, d'une variable aléatoire de Poisson. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Covariance de deux variables aléatoires. Relation $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$. Cas de variables indépendantes. Variance d'une somme finie, cas de variables deux à deux indépendantes.	

Loi faible des grands nombres

Si $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes, de même loi et admettant un moment d'ordre 2, alors, si $S_n=\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $m=E(X_1)$, on a, $$P\left(\left\lvert\frac{S_n}{n}-m\right\rvert\geqslant\varepsilon\right)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$	Les étudiants doivent savoir retrouver, pour $\varepsilon>0$, l'inégalité : $$P\left(\left\lvert\frac{S_n}{n}-m\right\rvert\geqslant\varepsilon\right)\leqslant\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$ où σ est la variance commune des X_k.

Fonctions génératrices

Fonction génératrice de la variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$: $$G_X(t)=E(t^X)=\sum_{k=0}^{+\infty}P(X=k)\,t^k.$$	La série entière définissant G_X est de rayon supérieur ou égal à 1 et converge normalement sur le disque fermé de centre 0 et de rayon 1. Continuité de G_X.
Détermination de la loi de X par G_X. Utilisation de G_X pour calculer les moments de X. La variable aléatoire X est d'espérance finie si et seulement si G_X est dérivable en 1 ; dans ce cas $E(X)=G_X{}'(1)$. La variable aléatoire X admet un second moment si et seulement si G_X est deux fois dérivable en 1.	Les étudiants doivent savoir retrouver l'expression de la variance de X à l'aide de $G_X{}'(1)$ et $G_X{}''(1)$. Les étudiants doivent savoir calculer la fonction génératrice d'une variable aléatoire de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson.
Fonction génératrice d'une somme finie de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.	